引力场方程真空静态球对称解

Shunzhi.Dai

China West Normal University

摘要：本文从带宇宙学常数的广义相对论场方程出发，分情况讨论了宇宙学常数对时空几何的影响，最终给出了 Schwarzschild 解与 Schwarzschild-de Sitter 解.

关键词：引力场方程　Schwarzschild 解　Schwarzschild-de Sitter 解

一、引力场方程

Einstein 引力场方程是一个二阶张量方程，在 $c=1$ 的自然单位制下，其形式为

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}+\Lambda g_{\mu\nu}=8\pi GT_{\mu\nu} \tag{1}$$

其中 $R_{\mu\nu}$ 为 Ricci 张量，R 为 Ricci 标量，$g_{\mu\nu}$ 为时空度规，Λ 为宇宙学常数，$T_{\mu\nu}$ 为应力-能量张量 (Stress-energy tensor)，G 为万有引力常数. 以下内容在不另外说明的情况下，使用的均是 $c=1$ 的自然单位制.

若用 $g^{\mu\nu}$ 对 (1) 的两个协变指标缩并，可以得到一个标量方程

$$-R+4\Lambda=8\pi GT \tag{2}$$

其中 T 是 $T_{\mu\nu}$ 的迹. 将 (2) 代入 (1) 消去 Ricci 标量，可以得到引力场方程的一个等效形式[?]

$$R_{\mu\nu}-\Lambda g_{\mu\nu}=8\pi G(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}) \tag{3}$$

对于真空，能量-应力张量及其迹均为零. 于是显而易见的，此时引力场方程为

$$R_{\mu\nu}=\Lambda g_{\mu\nu} \tag{4}$$

二、真空静态球对称时空的引力场方程

2.1 度规及 Christoffel 符号

由对称性可知，静态球对称度规形式为

$$g_{\mu\nu}=diag\left(-A(r),B(r),r^2,r^2Sin\theta\right) \tag{5}$$

其中 A 和 B 是两个只与半径 r 相关的函数. 假设时空坐标的仿射参量为 τ，利用 $g_{\mu\nu}$ 构造如下拉氏量

$$L=\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}=-A(r)\dot{t}^{2}+B(r)\dot{r}^{2}+r^{2}\dot{\theta}^{2}+r^{2}Sin\theta\dot{\varphi}^{2} \tag{6}$$

其中 $\dot{x}^{\mu}\equiv dx/d\tau$. 将 L 代入 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\partial L}{\partial x^{\mu}}-\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}}=0 \tag{7}$$

可以得到四个方程

$$\begin{aligned}\ddot{t}+\frac{A'}{A}\dot{t}\dot{r}=0\\ \ddot{r}+\frac{A'}{2B}\dot{t}^{2}+\frac{B'}{2B}\dot{r}^{2}-\frac{r}{B}\dot{\theta}^{2}-\frac{rSin^{2}\theta}{B}\dot{\varphi}^{2}=0\\ \ddot{\theta}+\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta}-Sin\theta Cos\theta\dot{\varphi}^{2}=0\\ \ddot{\varphi}+\frac{2Cos\theta}{Sin\theta}\dot{\theta}\dot{\varphi}+\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi}=0\end{aligned}$$

又知测地线方程为

$$\ddot{x}^{\rho}+\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}=0 \tag{8}$$

将这四个等式与测地线方程作对比，容易看出，静态球对称时空的非零 Christoffel 符号分别为

$$\begin{aligned}&\Gamma^{0}_{10}=\Gamma^{0}_{01}=\frac{A'}{2A}\\ &\Gamma^{1}_{00}=\frac{A'}{2B};\Gamma^{1}_{11}=\frac{B'}{2B};\Gamma^{1}_{22}=-\frac{r}{B};\Gamma^{1}_{33}=-\frac{rSin^{2}\theta}{B}\\ &\Gamma^{2}_{12}=\Gamma^{2}_{21}=\frac{1}{r};\Gamma^{2}_{33}=-Sin\theta Cos\theta\\ &\Gamma^{3}_{23}=\Gamma^{3}_{32}=\frac{Cos\theta}{Sin\theta};\Gamma^{3}_{13}=\Gamma^{3}_{31}=\frac{1}{r}\end{aligned} \tag{9}$$

2.2 Ricci 张量

Riemann 曲率张量为[?]

$$R_{\mu\rho\nu}{}^{\sigma}=-\partial_{\mu}\Gamma^{\sigma}_{\rho\nu}+\partial_{\rho}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}-\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}+\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\rho\lambda} \tag{10}$$

对 $\rho\sigma$ 指标缩并, 得到 Ricci 张量为

$$R_{\mu\nu}=R_{\mu\rho\nu}{}^{\rho}=-\partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\rho\nu}+\partial_{\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}-\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}+\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\rho\lambda} \tag{11}$$

缩并 Christoffel 符号可以化简为[?]

$$\Gamma^{\rho}_{\rho\nu}=\partial_\nu ln\sqrt{|g|} \tag{12}$$

其中 g 为度规的行列式，可以算得

$$ln\sqrt{|g|}=ln(ABr^4Sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}lnA+\frac{1}{2}lnB+2lnr+ln(Sin\theta) \tag{13}$$

将其代入 Ricci 张量中就得到

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu}&=-\partial_\mu\partial_\nu ln\sqrt{|g|}+\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\partial_\lambda ln\sqrt{|g|}+\partial_\rho\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}-\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\\&=-\partial_\mu\partial_\nu\left[\frac{1}{2}lnA+\frac{1}{2}lnB+2lnr+ln(Sin\theta)\right]\\&+\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\partial_\lambda\left[\frac{1}{2}lnA+\frac{1}{2}lnB+2lnr+ln(Sin\theta)\right]\\&+\partial_\rho\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}-\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\end{aligned} \tag{14}$$

计算可知，Ricci 张量的非零元素全部在对角线上[?]

$$\begin{aligned}&R_{00}=\frac{A''}{2B}-\frac{A'B'}{4B^2}-\frac{(A')^2}{4AB}+\frac{A'}{rB}\\&R_{11}=-\frac{A''}{2A}+\frac{A'B'}{4AB}+\frac{(A')^2}{4A^2}+\frac{B'}{rB}\\&R_{22}=1-\frac{1}{B}-\frac{rA'}{2AB}+\frac{rB'}{2B^2}\\&R_{33}=Sin^2\theta-\frac{Sin^2\theta}{B}-\frac{rSin^2\theta A'}{2AB}+\frac{rSin^2\theta B'}{2B^2}=Sin^2\theta R_{22}\end{aligned} \tag{15}$$

综上所述，联立 (4)(5)(15)，可以得到真空静态球对称时空的相互独立的场方程为

$$R_{00} = \frac{A''}{2B}-\frac{A'B'}{4B^2}-\frac{(A')^2}{4AB}+\frac{A'}{rB}=-\Lambda A \tag{16}$$

$$R_{11} = -\frac{A''}{2A}+\frac{A'B'}{4AB}+\frac{(A')^2}{4A^2}+\frac{B'}{rB}=\Lambda B \tag{17}$$

$$R_{22} = 1-\frac{1}{B}-\frac{rA'}{2AB}+\frac{rB'}{2B^2}=\Lambda r^2 \tag{18}$$

其中缺少了 R_{33} 分量的方程，这是因为 R_{33} 分量列出的方程是一个冗余的方程.

三、引力场方程真空静态球对称解

下面分 $\Lambda=0$ 及 $\Lambda\neq 0$ 两种情况分别说明场方程解的具体形式.

3.1 Schwarzschild 解

$\Lambda = 0$ 对应的场方程为

$$R_{00} = \frac{A''}{2B} - \frac{A'B'}{4B^2} - \frac{(A')^2}{4AB} + \frac{A'}{rB} = 0 \tag{19}$$

$$R_{11} = -\frac{A''}{2A} + \frac{A'B'}{4AB} + \frac{(A')^2}{4A^2} + \frac{B'}{rB} = 0 \tag{20}$$

$$R_{22} = 1 - \frac{1}{B} - \frac{rA'}{2AB} + \frac{rB'}{2B^2} = 0 \tag{21}$$

用 B 乘以 (19)，A 乘以 (20)，算得

$$BR_{00} + AR_{11} = \frac{A'B + AB'}{B} = \frac{(AB)'}{B} = 0 \tag{22}$$

积分得到

$$AB = k_1 \tag{23}$$

其中 $k_1 \in R$ 是积分常数. 将 (23) 代入 (21)，得到

$$k_1 = A + rA' = (rA)' \tag{24}$$

积分得到

$$A = k_1 + \frac{k_2}{r} \tag{25}$$

其中 $k_2 \in R$ 是积分常数. 将 (25) 带回 (23) 得到

$$B = \frac{k_1}{k_1 + \frac{k_2}{r}} \tag{26}$$

时空线元即

$$ds^2 = -\left(k_1 + \frac{k_2}{r}\right) dt^2 + \frac{k_1}{k_1 + \frac{k_2}{r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 Sin^2\theta d\varphi^2 \tag{27}$$

观察 27 可知，这一线元对应的时空在无穷远处应渐近平直

$$\lim_{r\to\infty} A = \lim_{r\to\infty} B = 1 \tag{28}$$

因此可得积分常数 $k_1 = 1$. 另一个积分常数 k_2 可由测地线方程的弱场近似求得[?]，其值为 $-2GM$，其中 M 为引力源的质量. 这样，便求得度规为

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 Sin^2\theta d\varphi^2 \tag{29}$$

这一解是 Karl Schwarzschild 率先得到的，因此又被称为 Schwarzschild 解.

3.2 Schwarzschild-de Sitter 解

$\Lambda \neq 0$ 对应的场方程就是 (16)(17)(18) 本身. 使用 Schwarzschild 解中同样的方法，用 B 乘以 (16)，A 乘以 (17)，算得

$$BR_{00} + AR_{11} = \frac{A'B + AB'}{B} = \frac{(AB)'}{B} = 0 \tag{30}$$

积分得到

$$AB = k_3 \tag{31}$$

其中 $k_3 \in R$ 是积分常数. 将 (31) 代入 (18)，得到

$$k_3 = A + rA' + \Lambda r^2 = (rA)' + \Lambda r^2 \tag{32}$$

积分得到

$$A = k_3 + \frac{k_4}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 \tag{33}$$

其中 $k_4 \in R$ 是积分常数. 将 (33) 带回 (31) 得到

$$B = \frac{k_3}{k_3 + \frac{k_4}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2} \tag{34}$$

时空线元即

$$ds^2 = -\left(k_3 + \frac{k_4}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)dt^2 + \frac{k_3}{k_3 + \frac{k_4}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 Sin^2\theta d\varphi^2 \tag{35}$$

考虑到 $\Lambda = 0$ 时这一线元应退化到 Schwarzschild 度规，于是有 $k_3 = k_1 = 1, k_4 = k_2 = -2GM$. 这样，便求得度规为

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 Sin^2\theta d\varphi^2 \tag{36}$$

这一度规构造的时空称为 Schwarzschild-de Sitter 时空.

参考文献

[1] 赵峥. 广义相对论基础 [M]. 第 1 版. 北京：清华大学出版社，2010：58-60，65-66

[2] 梁灿彬. 微分几何入门与广义相对论 [M]. 第 1 版. 北京：科学出版社，2010：81-82

[3] Sean M.Carroll.Spacetime and Geometry[M]. 第 1 版. 北京：世界图书出版社，2007：195